

Первый тур 27.11.2024. Вторая лига.

1. В клетках квадрата 2024×2024 были расставлены числа $1, 2, 3, \dots, 2024^2$. Эти числа переставили так, что в каждой клетке число изменилось. Назовем клетчатый квадрат с **четной** стороной *стабильным*, если он целиком содержится внутри исходного квадрата, а набор чисел в его клетках при перестановке не изменился. Какое наибольшее количество стабильных квадратов могло быть?

2. Докажите, что не существует натуральных чисел a, b, c, d и n таких, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4\sqrt{abcd} = 7 \cdot 2^{2n-1}.$$

3. Дан вписанный пятиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5$; положим $P_6 = P_1$ и $P_0 = P_5$. При $k = 1, 2, 3, 4, 5$ обозначим через I_k центр вписанной окружности треугольника $P_{k-1}P_kP_{k+1}$. Оказалось, что пятиугольник $I_1I_2I_3I_4I_5$ также является вписанным. Докажите, что прямые $P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4$ и P_5I_5 пересекаются в одной точке.

4. Дано натуральное число $n > 1$. В стране n баронов, некоторые из которых дружат, дружба всегда взаимна. Король хочет провести на плоскости k параллельных прямых. А затем для каждого барона отметить на каждой из k прямых отрезок так, чтобы два барона дружили тогда и только тогда, когда на каждой из этих k прямых их отрезки имели общую точку. Для какого наименьшего натурального k король всегда сможет достичь желаемого?

5. Найдите все непрерывные функции $f: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ такие, что

$$f(xy) = \frac{f(x)f(y)}{f(x) + f(y) - 1}$$

для любых $x, y \in (1, +\infty)$.

6. Существуют ли тысяча конечных подмножеств натурального ряда с равными суммами и равными суммами обратных?

7. Окружность ω проходит через вершины B и C остроугольного треугольника ABC и пересекает отрезки AB и AC в точках D и E . Отрезки BE и CD пересекаются в точке F . На описанной окружности треугольника ABF выбрана такая точка G , что GB касается ω . На описанной окружности треугольника ACF выбрана такая точка H , что HC касается ω . Докажите, что описанная окружность треугольника AGH проходит через фиксированную точку $T \neq A$, не зависящую от выбора ω .

8. Пусть $z_1, z_2, \dots, z_k, w_1, w_2, \dots, w_k$ — комплексные числа, у каждого из которых модуль равен 1. Докажите неравенство

$$\sqrt{k^2 - \left| \sum_j z_j w_j \right|^2} \leq \sqrt{k^2 - \left| \sum_j z_j \right|^2} + \sqrt{k^2 - \left| \sum_j w_j \right|^2}.$$

9. Дано натуральное число n . В корзине лежат $5n$ шаров, на каждом из которых написано одно из чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Оказалось, что каждое из этих чисел написано ровно на 5 шарах. Шары разложили в n коробок, в каждой из которых по 5 шаров. Докажите, что в каждой коробке можно выбрать 3 шара и покрасить один из них в красный цвет, а другие два — в синий так, чтобы сумма чисел на красных шарах была в два раза меньше суммы чисел на синих шарах.

10. Перед Игорем и Сашей лежат две кучи, в которых a и b камней. Они по очереди берут камни из куч. Начинает Игорь. За один ход можно взять из любой кучи хотя бы 1, но не более половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких натуральных a и b Саша сможет выиграть независимо от действий Игоря?

Первый тур 27.11.2024. Третья лига.

1. В клетках квадрата 2025×2025 были расставлены числа $1, 2, 3, \dots, 2025^2$. Эти числа переставили так, что в каждой клетке число изменилось. Назовем клетчатый квадрат 2×2 *стабильным*, если набор чисел в его клетках при перестановке не изменился. Какое наибольшее количество стабильных квадратов могло быть?

2. Докажите, что существует лишь конечное количество четверок натуральных чисел a, b, c и d таких, что

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4\sqrt{abcd} = 2024.$$

3. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = CD$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I , биссектрисы треугольника CDE — в точке J . Докажите, что если четырехугольник $AIFE$ — трапеция, то эта трапеция равнобедренная.

4. Можно ли в пространстве расположить 8 кубов со сторонами, параллельными осям координат, так, что для каждого куба A среди оставшихся кубов нашелся бы ровно один куб B , не имеющий с A общих точек?

5. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$f(f(x) + xy) = f(x)f(x + y)$$

для любых $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Существуют ли два подмножества натурального ряда с равными суммами и равными суммами обратных?

7. Окружность ω проходит через вершины B и C остроугольного треугольника ABC и пересекает отрезки AB и AC в точках D и E . Отрезки BE и CD пересекаются в точке F . На описанной окружности треугольника ABF выбрана такая точка G , что GB касается ω . На описанной окружности треугольника ACF выбрана такая точка H , что HC касается ω . Докажите, что описанная окружность треугольника AGH проходит через фиксированную точку $T \neq A$, не зависящую от выбора ω .

8. Для положительных чисел a, b и c , произведение которых равно единице, докажите неравенство

$$(a + b + c)(ab + bc + ac) + 3 \geq 4(a + b + c).$$

9. Сколькими способами можно расставить числа $1, 2, 3, \dots, 20$ в ряд так, чтобы для некоторого натурального k числа с первого до k -ого шли в порядке возрастания, а числа с k -ого до двадцатого шли в порядке убывания?

10. Перед Игорем и Сашей лежат две кучи, в которых a и b камней. Они по очереди берут камни из куч. Начинает Игорь. За один ход можно взять из любой кучи хотя бы 1, но не более половины камней. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких натуральных a и b Саша сможет выиграть независимо от действий Игоря?